ある種の虚アーベル体の相対類数について(代数的整数論)

堀江, 邦明

数理解析研究所講究録
759巻 1991年 148-151

ある種の虚アーベル体の相対類数について

山口大学教養部　堀江 邦明　(Kuniaki Horie)

複素数体の中で考えた有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の有限次アーベル拡大体を単にアーベル体と呼ぶ. S を素数の有限集合とし，アーベル体 k に対して h_k で k の類数，s_k で その素因子がすべて S に入る h_k の最大因子，f_k で k の導手を表す. k が虚アーベル体，即ち，実数体に入らぬアーベル体であるときは h_k^- で k の相対類数を，s_k^- でその素因子がすべて S に入る h_k^- の最大因子を表す; $s_k^-=(s_k, h_k^-)$.

さて，自然数 m を1つ固定し，P を導手が素数の巾である虚アーベル体から成る1つの集合とし，C を P の体から合成される虚アーベル体の全体としよう. 表題の，ある種の虚アーベル体とは C に属する体を指す. また P に属する体で 包含関係において極小なものの全体を P_{min} と書く:

$$P_{min}=\{K\in P \mid K\supseteq k\in P \Rightarrow k=K\}\subseteq C.$$

例えば，P が素数巾の導手を持つ円分体 $\neq \mathbb{Q}$ の全体ならば，C は円分体 $\neq \mathbb{Q}$ の全体となり，P_{min} は 4分体と奇素数分体総てとから成る集合になる.

定理１．　次の２つの主張は同値である：

(i)　$\#\{k \in C \mid h_k^- / s_k^- \leqq m\} < \infty$,

(ii)　$\#\{k \in P_{min} \mid h_k^- / s_k^- \leqq m\} < \infty$.

証明の要点は，岩澤理論（特に Iwasawa, Ferrero, Washington による 類数公式）と Uchida の定理（＝アーベル体に対する Brauer-Siegel の定理）とを結び付ける所にある．

注意：　定理１の証明には

$$k,\ K \in C,\ k \subseteq K \quad \Rightarrow \quad h_k^- \mid h_K^-$$

という簡単な事実も用いられる．一般に，K が虚アーベル体で k が その虚の部分体ならば $h_k^- \mid 4h_K^-$ の成り立つことが分かる．

定理１’．　次の２つの主張は同値である：

(i’)　$\#\{k \in C \mid h_k / s_k \leqq m\} < \infty$,

(ii’)　$\#\{k \in P_{min} \mid h_k / s_k \leqq m\} < \infty$.

定理１’の証明は，定理１のそれと同様に出来る．ここで，(ii) が真であれば (ii’) もそうであることは明らかであるが，アーベル体の（相対）類数の表などを眺めていると次の疑問が湧く．

問題１．　(ii)，従って，(i) は常に成立するのではないか．

<u>定理２</u>．　$S=\{2\}$ ならば確かに (ii) が成立する．従って，虚アーベル体 $k\in C$ で h_k^- を割る最大の奇数が m 以下となるようなものは有限個しか存在しない．

この結果の証明には「K を 2 巾次のアーベル体とするとき，$K/\mathbb{Q}$ で分岐する K の素イデアルが唯一つならば h_K は奇数である」という事実 (Washington； GTM 83, 185頁参照) を本質的に用いる． $S\neq\{2\}$ の場合は然し，問題１への解答がいかにして得られるのであろうか．興味深い所である．

さて定理２によって，特に虚アーベル体 $k\in C$ で h_k^- が 2 の巾 (≧1) に等しいものは有限個しか存在しない訳であるが，類数が 1 に等しい 2 巾次の虚アーベル体の完全な決定がなされている (Uchida； Proc. Int. Conf. on Class Numbers and Fundamental Units, Katata, 1986) ために，このような（即ち相対類数が 2 巾の）虚アーベル体 $\in C$ は総て決定出来る．然し，例えば h_k^- を割る奇数 >1 が 3 のみであるような $k\in C$ を総て決定するにはどうしたら良いのであろうか．これもまた興味深い問題である．いままで C の体のみを考察してきたが，定理２から引き起こされる，最も単純な問題の１つとして次の様なものも考えられる：

<u>問題２</u>．　類数が 2 の巾に等しい虚２次体は有限個しか無いのか，或いは無限個存在するのか．

これに関連して，各 $x>0$ に対し $Q_x=\{$虚２次体 $k \mid f_k\leqq x\}$ とおくとき，

$$\frac{1}{x}\cdot \#\{k \in Q_x \mid h_k \text{ は 2 の巾に等しい}\} \to 0 \qquad (x\to\infty)$$

ではないのかという Cohen の予想 (cf. Springer LNM 1068) がある．

最後に，定理１とは一寸違うけれども，その証明を変形すれば得られる事実の１例を挙げる．

定理３．　C に属する虚アーベル体で素数巾の相対類数を持つものが有限個しか存在しないためには，そのような体が P_{min} の中に有限個しか存在しないことが必要かつ十分な条件である．